Αριθμητική Ανάλυση

Νόρμες Διανυσμάτων:

Έστω X ένας γραμμικός χώρος ($X=\mathbb{R}^n$ ή $X=\mathbb{C}^n$) και $\mathbb{B}$ ένα σώμα ($\mathbb{B}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{B}=\mathbb{C}$). Η απεικόνιση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ λέγεται νόρμα αν ισχύουν:

(N_1): $x\in X$, $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$

(N_2): $\forall x\in X$ κ' $\lambda\in\mathbb{B}$: $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$

(N_3): $\forall x,y\in X$: $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ (τριγωνική)

$0=\|0\|=\|x-x\|=\|x+(-x)\|\le\|x\|+\|-x\|=2\|x\|$

$\|x-y\|\ge\big|\|x\|-\|y\|\big|$

$\|x\|=\|y+(x-y)\|\le\|y\|+\|x-y\| \Leftrightarrow \|x-y\|\ge\|x\|-\|y\|$

Ομοίως έχουμε $\|x+y\|\ge\|y\|-\|x\|$

l_1 νόρμα: $\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$

l_2 νόρμα: $\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}$ Ευκλείδεια νόρμα

l_∞ νόρμα: $\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$

Ειδικές Περιπτώσεις της l_p νόρμας, $p\ge1$:

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Αποδεικνύεται ότι $\lim_{p\to\infty}\|x\|_p=\max_{1\le i\le n}|x_i|=\|x\|_\infty$

Οι νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμες ή συγκρίσιμες αν υπάρχουν $m, M>0$ τ.ω.
$m\|x\|\le\|x\|\le M\|x\|$
$m'\|x\|'\le\|x\|\le M'\|x\|'$ $\Rightarrow$ $m'=\frac{1}{m}$, $M'=\frac{1}{M}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Μια ακολουθία διανυσμάτων $\{x^{(m)}\}_{m=0}$ συγκλίνει στο διάνυσμα x αν-ν $\|x^{(m)}-x\|$ είναι μοναδική ακολουθία.

Δύο νόρμες είναι ισοδύναμες αν ο χώρος X είναι πεπερασμένης διάστασης.

Ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ως $(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Στον $\mathbb{C}^n$ $(\cdot,\cdot)$ $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ ως $(x,y)_2 = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$

$(x,x)_2 = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i x_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \|x\|_2^2$

Ανισότητα Cauchy-Schwartz:

$|(x,y)_2| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$

$\cos(x,y) = \dfrac{(x,y)_2}{\|x\|_2 \|y\|_2}$, x,y είναι ορθογώνια αν $(x,y)_2 = 0$.

Νόρμες Πινάκων

Η απεικόνιση $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$ είναι μια νόρμα πίνακα αν ισχύουν οι ιδιότητες:

(N_1) $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(N_2) $\forall A \in \mathbb{R}^{n,n}$ κ' $\lambda \in \mathbb{R}$ $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$

(N_3) $\forall A,B \in \mathbb{R}^{n,n}$. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(N_4) $\forall A,B \in \mathbb{R}^{n,n}$. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ (πολ/στικό)

Φυσικές Νόρμες Πινάκων:

Έστω $\|\cdot\|$ μια διανυσματική νόρμα. Ορίζουμε την φυσική νόρμα πίνακα $\|\cdot\|$ που παράγεται από τη διανυσματική $\|\cdot\|$ ως $\|A\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$

Προφανώς $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

l_1 $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

l_∞ $\|A\|_\infty = \max \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

l_2 $\|A\|_2 = (P(A^T A))^{1/2}$, στον $K^{n,n}$: $(P(A^* A))^{1/2}$

Ορίζουμε ως φασματική ακτίνα του πίνακα B ως $P(B) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{ |\lambda_i|$, λ_i ιδιοτιμή του B, $Bx^{(i)} = \lambda_i x^{(i)}$, $x^{(i)} \in K^n / \{0\} \}$

A^* ο συζυγής ανάστροφος του A. $A^* = (\bar{A})^T = (\bar{A^T})$

Επαναληπτικές Μέθοδοι:

Βασίζονται στην κατασκευή ακολουθίας διανυσμάτων $(x^n)_{n=0}^{\infty}$ που συγκλίνει, θα συγκλίνει στην λύση x του συστήματος $Ax=b$.
Θα μελετήσουμε της μεθόδους Jacobi και Gauss-Seidel.

$Ax=b$ με $a_{ii} \neq 0$, λύνουμε την i στην σειρά εξίσωση ως προς x_i.

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n = b_i$

$x_i = \left(b_i - \sum_{i=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1} a_{ij}x_j\right) / a_{ij}$

Μέθοδος Jacobi.

Κατασκευάζουμε την ακολουθία $(x^m)_{m=0}^{\infty}$ ως

$$x_i^{(m+1)} = \left(b_i - \sum_{i=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(m)}\right) / a_{ij}$$

$i=1,2,n$ $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ αυθαίρ

Αν συγκλίνει θα συγκλίνει στο x.

Gauss-Seidel

$$x_i^{(m+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(m)}\right) / a_{ii}, \quad i=1,2,\dots,n \quad x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Scanned with CamScanner